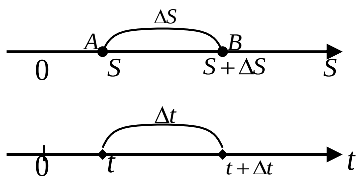
Тема 2. Дифференциальное исчисление функции одной переменной

Лекция 2. Дифференцирование функции

Всякий процесс или явление, протекающее во времени, характеризуется, наряду с другими показателями, такой важной характеристикой как скорость.

Нахождение скорости неравномерного движения, скорости накопления биомассы, изменение линейных размеров растения и т.д. - все эти задачи приводят к однотипным вычислениям, результат которых называют ***производной***.

§1. Задача о пути, приводящая к понятию производной (задача о скорости равномерного прямолинейного движения)



Пусть материальная точка, совершая прямолинейное, равномерное движение из положения A в положение B по оси OS по закону $S = f(t)$ (где t – время, S-пройденный путь) за время Δt пройдет путь ΔS.

Следовательно, за время (t+Δt) точка пройдет путь $(S + \Delta S)$.

Тогда: $S + \Delta S = f(t + \Delta t)$. Найдем приращение пути:

$$\begin{array}{r} -\begin{array}{l} S + \Delta S = f(t+\Delta t) \\ S \qquad\;\;\, = f(t) \end{array} \\ \hline \Delta S = f(t+\Delta t) - f(t) \end{array}$$

Значит, средняя скорость на этом участке пути будет равна:

$$\boxed{\upsilon_{cp} = \frac{\Delta S}{\Delta t}}.$$

Определение 1. ***Средней скоростью*** движения материальной точки называется отношение приращения пути к приращению времени.

Если требуется найти скорость в данный момент, то промежуток времени Δt нужно бесконечно уменьшать, т.е. $\Delta t \to 0$ и тогда скорость в данный момент времени будет равна:

$$\boxed{\upsilon_{мгн.} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta S}{\Delta t}}.$$

Определение 2. ***Мгновенной скоростью*** материальной точки в данный момент времени ***t*** называется предел средней скорости при $\Delta t \to 0$.

С точки зрения математики мгновенная скорость представляет собой производную пути по времени (это ***физический смысл производной***).

§2. Производная функции $y = f(x)$

При решении практических задач возникает необходимость с помощью одного и того же аналитического процесса из данной функции $y = f(x)$ получить новую функцию, которую называют производной $\left(y'; f'(x); \dfrac{dy}{dx}\right)$.

Определение 1. Процесс нахождения производной называется ***дифференцированием*** и рассматривается в виде основных 4-х шагов.

Схема дифференцирования (метод 4-х шагов)

Пусть дана функция $y = f(x)$. Найти ее производную $(y' - ?)$.

1. Пусть ***x*** получит приращение Δ***x***. Он станет $x + \Delta x$. Тогда ***y*** тоже получит приращение и станет $y + \Delta y = f(x + \Delta x)$.
2. Найдем приращение функции Δy:

$$-\begin{array}{l} y + \Delta y = f(x + \Delta x) \\ \underline{y \qquad\quad = f(x) \qquad\quad} \\ \Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) \end{array}.$$

3. Составим отношение $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

4. Найдем предел этого отношения при $\Delta x \to 0$:

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

Определение 2. ***Производной функции*** $y = f(x)$ называется предел отношения приращения функции к приращению аргумента при стремлении последнего к нулю:

$$\boxed{y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}}$$

Замечания:

1. $y' = f'(x)$ - функция от ***x***, и от нее тоже можно находить производную.
2. Можно находить частное значение производной $\left(y'_{x=a} = \ldots;\ f'(a) = \ldots\ldots\right)$.

Пример: Найти методом 4-х шагов производную функцию $y = x^2 - 7x + 5$.

1) Пусть ***x*** получит приращение Δ***x***, тогда он станет $(x + \Delta x)$. Тогда функция тоже получит приращение и станет

$$y + \Delta y = (x+\Delta x)^2 - 7(x+\Delta x) + 5.$$

2) Найдем Δy:

$$\begin{array}{l} \quad y + \Delta y = (x+\Delta x)^2 - 7(x+\Delta x) + 5 \\ - \\ \quad y \qquad\quad = x^2 - 7x + 5 \\ \hline \quad \Delta y = \cancel{x^2} + 2x \cdot \Delta x + \Delta x^2 - \cancel{7x} - 7\Delta x + \\ \quad + \cancel{5} - \cancel{x^2} + \cancel{7x} - \cancel{5} = 2x \cdot \Delta x + \Delta x^2 - 7\Delta x \end{array}.$$

3) Составим отношение:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2x \cdot \Delta x + \Delta x^2 - 7\Delta x}{\Delta x}.$$

4) Найдем предел этого отношения:

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\cancel{\Delta x}\left(2x + \Delta x - 7\right)}{\cancel{\Delta x}} = \lim_{\Delta x \to 0} \left(2x + \Delta x - 7\right) = 2x + 0 - 7 =$$

$= 2x - 7$, т.е. .

$$y' = \left(x^2 - 7x + 5\right)' = 2x - 7$$

§3. Таблица основных производных

1. $(c)' = 0$
2. $(x)' = 1$
3. $(u + v - z)' = u' + v' - z'$
4. $(u \cdot v)' = u'v + uv'$
5. $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$
6. $\left(\dfrac{c}{v}\right)' = -\dfrac{cv'}{v^2}$
7. $\left(\dfrac{v}{c}\right)' = \dfrac{1}{c} \cdot v'$
8. $(cv)' = c \cdot v'$
9. $(u^n)' = n \cdot u^{n-1} \cdot u'$
10. $(e^u)' = e^u \cdot u'$
11. $\left(\sqrt{u}\right)' = \dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$
12. $(a^u)' = a^u \cdot \ln a \cdot u'$
15. $(\sin u)' = \cos u \cdot u'$
16. $(\cos u)' = -\sin u \cdot u'$
17. $(\operatorname{tg} u)' = \sec^2 u \cdot u'$
18. $(\operatorname{ctg} u)' = -\operatorname{cosec}^2 u \cdot u'$
19. $(\arcsin u)' = \dfrac{u'}{\sqrt{1 - u^2}}$
20. $(\arccos u)' = -\dfrac{u'}{\sqrt{1 - u^2}}$
21. $(\operatorname{arctg} u)' = \dfrac{u'}{1 + u^2}$
22. $(\operatorname{arcctg} u)' = -\dfrac{u'}{1 + u^2}$
23. $(\operatorname{arctg} u)' = \dfrac{u'}{1 + u^2}$
24. $(\operatorname{cosec} u)' = -\operatorname{cosec} u \cdot \operatorname{ctg} u \cdot u'$
25. $(\operatorname{arcsec} u)' = \dfrac{u'}{u\sqrt{u^2 - 1}}$
26. $(\operatorname{arccosec} u)' = -\dfrac{u'}{u\sqrt{u^2 - 1}}$

13. $(\ln u)' = \frac{u'}{u}$

27. $(u^v)' = v \cdot u^{v-1} \cdot u' + u^v \cdot \ln u \cdot v'$

14. $(\log_a u)' = \frac{u'}{u \cdot \ln a}$

§4. Дифференцируемость функций

Определение 1. Функция $y = f(x)$, имеющая в точке x_0 производную, называется ***дифференцируемой в этой точке***.

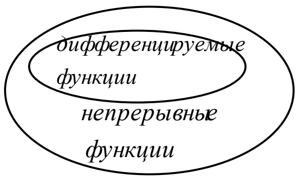
Определение 2. Функция $y = f(x)$, дифференцируемая в каждой точке интервала $(a;b)$, дифференцируема на этом интервале.

Пример:

$y = x^2 \quad ; \quad x \in (-\infty;\infty)$

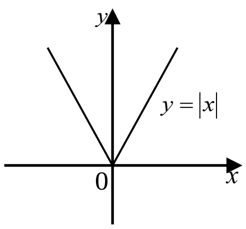
$y' = 2x$ – дифференцируема на $(-\infty;\infty)$

Теорема. Если функция $y = f(x)$ дифференцируема в некоторой точке x_0, то в этой точке она и непрерывна. Обратное утверждение неверно, т.к. есть функции непрерывные, но не имеющие производной в какой-то точке.



Пример:

Функция $y = |x|$ в точке $x = 0$ непрерывна, но не имеет производной.



§5. Производная сложной функции

Если $y = f(u)$ и $u = \varphi(x)$, то $y = f(\varphi(x))$. Тогда $\boldsymbol{y}$ – сложная функция от $\boldsymbol{x}$, где

$\boldsymbol{y}$ - функция,

u - промежуточный аргумент,

x - конечный аргумент.

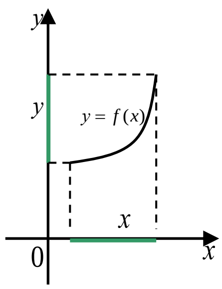
Теорема. Если функции $y = f(u)$ и $u = \varphi(x)$ дифференцируемые функции от своих аргументов, то производная сложной функции существует и равна производной функции по промежуточному аргументу ***u*** умноженной на производную промежуточного аргумента по конечному аргументу ***x***, т.е.

$\boxed{y_x' = y_u' \cdot u_x'}$ или $\boxed{\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy}{du} \cdot \dfrac{du}{dx}}$ (без доказательства).

§6. Производная обратной функции

Пусть $y = f(x)$ дифференцируемая и строго монотонная функция на некотором промежутке ***x***. Тогда функция $x = \varphi(y)$ - ей обратная функция.

Можно показать, что эта новая функция непрерывна на множестве ***X***.



Теорема. Для дифференцируемой функции с производной не равной нулю, производная обратной функции равна обратной величине производной данной функции:

$$\boxed{x_y' = \frac{1}{y_x'}}.$$

§7. Производные высших порядков

Пусть задана некоторая дифференцируемая функция $y = f(x)$. Тогда:

1) $y' = f'(x) = \dfrac{dy}{dx}$ - производная 1-го порядка.

Если $f'(x)$ - это опять функция от ***x***, то от нее можно найти производную:

2) $y'' = f''(x) = \dfrac{d^2y}{dx^2}$ - производная 2-го порядка.

3) $y''' = f'''(x) = \dfrac{d^3y}{dx^3}$ - производная 3-го порядка.

… ………………. …………………………... .

n) $y^{(n)} = f^{(n)}(x) = \dfrac{d^ny}{dx^n}$ - производная n-го порядка.

Пример: $y = x^4 - 2x + 5 \quad , \quad y''' - ?$

$y' = 4x^3 - 2$
$y'' = 12x^2$
$y''' = 24x$

§8. Дифференцирование неявных функций

$F(x;y) = 0$ - функция, заданная неявно, т.е. функция не разрешена относительно ***y***.

Чтобы найти производную неявной функции, следует все члены выражения $F(x;y) = 0$ продифференцировать по ***x***, а затем выразить ***y´*** через ***x; y*** и ***const***, помня, что $x_x' = 1$, а $y_x' = y'$.

Пример: $x^3 + y^3 + 5x^2y + xy - 5x + 6y + 8 = 0 \quad ; \quad y' - ?$

$$\left(x^3\right)' + \left(y^3\right)' + \left(5x^2y\right)' + (xy)' - (5x)' + (6y)' + (8)' = 0$$

$$3x^2 + 3y^2 \cdot y' + 5\left(2x \cdot y + x^2 \cdot y'\right) + x' \cdot y + x \cdot y' - 5 + 6y' = 0$$

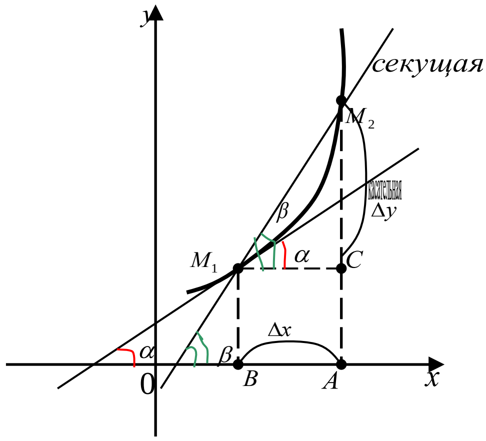
$$3x^2 + \underline{3y^2 \cdot y'} + 10xy + \underline{5x^2y'} + y + \underline{x \cdot y'} - 5 + \underline{6y'} = 0 \qquad (1)$$

$$y'\left(3y^2 + 5x^2 + x + 6\right) = -3x^2 - 10xy - y + 5$$

$$y' = \frac{5 - 3x^2 - 10xy - y}{3y^2 + 5x^2 + x + 6}$$

Аналогично можно находить производную 2-го порядка (y''). Для этого выражение (1) нужно еще раз продифференцировать по ***x*** и выразить ***y´´*** через ***x; y; y´*** и ***const***. Затем в полученное выражение подставить значение ***y´***.

§9. Геометрические свойства производной



Из ΔM_1M_2C:

$\angle M_2CM_1 = 90°; \quad \angle M_2M_1C = \beta;$

$M_1C = \Delta x; \quad M_2C = \Delta y$

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{M_2C}{M_1C} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Если точка $M_2 \to M_1$, тогда секущая будет приближаться к касательной и $\angle\beta \to \angle\alpha$. Тогда:

$$\lim_{\substack{M_2 \to M_1 \\ \Delta x \to 0}} \operatorname{tg}\beta = \operatorname{tg}\alpha \qquad (1)$$

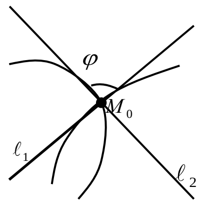
$$\lim_{\Delta x \to 0} \operatorname{tg}\beta = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = y' = k \qquad (2)$$

$$\Rightarrow \boxed{y' = \operatorname{tg}\alpha = k}$$

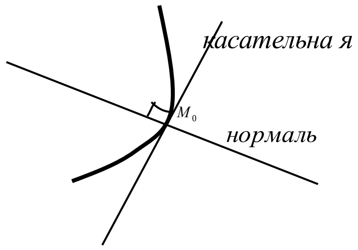
<u>Вывод</u>: Угловой коэффициент касательной (***k***) к графику функции $y = f(x)$ в точке с абсциссой x_0 равен производной данной функции в этой точке (***геометрический смысл производной***).

Замечания:

1) Чтобы найти угол между кривыми в точке их пересечения, следует найти угол между их касательными:



2) Используя геометрический смысл производной, можно написать уравнения касательной и нормали кривой в данной точке:



Воспользуемся уравнением пучка прямых: $y - y_0 = k(x - x_0)$, $k = y'(x_0)$ $\Rightarrow$

$$l_{кас.}: \boxed{y - y_0 = y'(x_0)(x - x_0)};$$

$$l_{норм.}: \boxed{y - y_0 = -\frac{1}{y'(x_0)}(x - x_0)}.$$

§10. Понятие дифференциала

Пусть дана функция $y = f(x)$. По определению: $y' = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$. По теореме о пределах имеем: если $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = b$, то $f(x) = b + \alpha$ - значит $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = y' + \alpha(x) \quad \Big| \cdot \Delta x$, получим: $\Delta y = y' \cdot \Delta x + \alpha(x) \cdot \Delta x$.

Получено приращение функции $\boldsymbol{y}$. Оно состоит из двух слагаемых: 1-е слагаемое $\boxed{y' \cdot \Delta x}$ называется ***главной линейной частью*** приращения функции; 2-е слагаемое $\boxed{\alpha(x) \cdot \Delta x}$ является б.м.в. более высокого порядка малости, чем 1-е слагаемое и им обычно пренебрегают.

Определение 1. Если приращение функции Δy в некоторой точке $\boldsymbol{x}$ может быть представлено в виде $\Delta y = y' \cdot \Delta x + \alpha(x) \cdot \Delta x$, то главная часть приращения $y' \cdot \Delta x$, линейная относительно Δx, называется ***дифференциалом функции*** и обозначается $\boldsymbol{dy}$:

$$\boxed{dy = y' \cdot \Delta x}.$$

Т.е. дифференциал функции равен произведению производной функции на приращение аргумента. Эту формулу часто используют для приближенных вычислений, т.к. дифференциал функции обычно находится проще, чем приращение функции:

$$\boxed{\Delta y \approx dy}.$$

Рассмотрим функцию $y = x$. Продифференцируем обе части равенства. Тогда $dy = dx$ (1)

$dy = x' \cdot \Delta x = \Delta x$ (2)

Сравнивая выражения (1) и (2), получим, что $\boxed{dx = \Delta x}$. Следовательно, формула дифференциала функции в конечном результате имеет вид:

$$\boxed{dy = y' \cdot dx}.$$

Пример:

$$y = \cos 5x$$
$$y' = -5\sin 5x$$
$$dy = -5\sin 5x \cdot dx$$

С геометрической точки зрения дифференциал функции $y = f(x)$ равен приращению ординаты касательной.

§11. Свойства дифференциалов (таблица дифференциалов)

1. $d(c) = 0$
2. $d(x) = dx$
3. $d(u + v - z) = du + dv - dz$
4. $d(u \cdot v) = du \cdot v + u \cdot dv$
5. $d(c \cdot v) = c \cdot dv$
6. $d\left(\dfrac{u}{v}\right) = \dfrac{du \cdot v - u \cdot dv}{v^2}$

7. $d(\sin u)=\cos u\cdot du$

Дифференциал сложной функции имеет тот же вид, что и дифференциал простой функции:

$$y=f(x) \qquad\qquad y=f(u)\quad;\quad u=\varphi(x)$$
$$dy=f'(x)\cdot dx \qquad\qquad dy=f'(u)\cdot du$$

$$f'(x)\cdot dx=f'(u)\cdot du$$

Это свойство дифференциала функции называется свойством ***инвариантности*** (неизменности).

§12. Применение дифференциала функции к приближенным вычислениям

Пусть задана функция $y=f(x)$. Воспользуемся приближенным равенством:

$$\Delta y\approx dy$$
$$\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x) \qquad (1)\ .$$
$$dy=f'(x)\cdot dx \qquad (2)$$

Сравнивая (1) и (2) выражения, получим:

$$f(x+\Delta x)-f(x)\approx f'(x)\cdot dx\ \Rightarrow$$

$\boxed{f(x+\Delta x)\approx f(x)+f'(x)\cdot dx}$ - формула для ***приближенного вычисления*** значений функции.

Можно доказать, что абсолютная погрешность этой формулы не превышает величины $\underset{\substack{\text{абс.}\\ \text{погрешн.}}}{\Delta}\le\dfrac{\max(y^{(n)})}{2}\cdot\Delta x^{n}$.

Пример: Вычислить $\sqrt{101}$.

Пусть $y=\sqrt{x}$ $\quad \begin{matrix} x=x_0+\Delta x & ,\text{где}\\ x_0=100\,;\,\Delta x=1 & \end{matrix}$ $\qquad y'=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}\ \Rightarrow$

$$\sqrt{100+1}\approx\sqrt{x_0}+y_{x_0}'\cdot\Delta x=\sqrt{100}+\frac{1}{2\sqrt{100}}\cdot 1=10+\frac{1}{20}=10,05$$

$$\sqrt{101}\approx 10,05$$